Санкт-Петербургский государственный университет

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Решение задач профильного ЕГЭ по математике повышенного уровня сложности

Solution of Problems of Profile Use in Mathematics of the Increased Level of Complexity

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 1

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Цель программы – систематизация теоретических знаний и закрепление практических навыков для успешной сдачи ЕГЭ по математике.

Основной задачей преподавания данной программы на подготовительных курсах является повышение уровня культуры в сфере математики, приобретение навыков и опыта в решении задач повышенного уровня сложности из 1 и 2 части профильного ЕГЭ по математике.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

- неполное среднее образование
- базовые знания по математике

1.3. Перечень результатов обучения (learningoutcomes)

По результатам обучения обучающийся должен знать:

- ключевые математические понятия и определения;
- свойства и графики элементарных функций;
- различные формулы и тождества для корней, логарифмов и тригонометрии;
- понятие производной и интеграла;
- теоремы и формулы из планиметрии и стереометрии;
- базовые понятия теории вероятностей.

По результатам обучения обучающийся должен уметь:

- применять свои знания в стандартной ситуации:
  - строить графики элементарных функций;
  - применять метод интервалов для рациональных неравенств;
  - решать типовые уравнения и неравенства, сводя их к базовым типам;
  - сравнивать числа и отбирать корни по дополнительным условиям;
  - строить множества на плоскости по данному уравнению;
  - находить производные элементарных функций;
  - находить интегралы простейших функций;
  - исследовать функцию с помощью производной;
  - решать типовые задачи по планиметрии;
  - уметь решать типовые задачи из стереометрии;
  - владеть методом координат и векторной алгеброй.
- применять свои знания в новой ситуации:
  - решать задачи на расположение корней квадратного трехчлена;
  - решать задачи с параметром графическим методом;
  - решать задачи с параметром методом фазовой плоскости;
  - применять метод рационализации к трансцендентным неравенствам;
  - знать альтернативные методы снятия модуля;
  - знать схемы эквивалентных преобразований иррациональных уравнений и неравенств;
  - знать схемы эквивалентных преобразований логарифмических уравнений и неравенств;
  - применять различные конструкции в геометрических задачах;
  - знать методы и приемы решения задач “олимпиадного” типа .

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

Обучение проводится в форме практических занятий и самостоятельной работы с использованием методических материалов.

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа					интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторныеработы	контрольныеработы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	использованием методических	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация	(итоговая) аттестация		
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
Форма обучения: очная																		
Учётных недель 10				24						3			9					1
Кол-во обучающихся																		
ИТОГО				24						3			9					1

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
Форма обучения: очно-заочная						
Учётных недель 10	Текущий контроль (проверка домашнего	-	Не предусмотрено	-	итоговый зачёт	по графику итоговой аттестаци

	задания)					и

2.2. Структура и содержание учебных занятий

№ п/п	Наименование темя (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Функции, их свойства, графики, формулы и тождества	Практические занятия	3
		Самостоятельная работа	1
2	Методы и приемы решения алгебраических уравнений	Практические занятия	2
		Самостоятельная работа	0,5
3	Методы и приемы решения алгебраических неравенств.	Практические занятия	3
		Самостоятельная работа	1
4	Текстовые задачи и задачи на производную	Практические занятия	2
		Самостоятельная работа	0,5
5	Методы решения задач с параметром	Практические занятия	6
		Самостоятельная работа	3
6	Задачи по планиметрии и стереометрии	Практические занятия	8
		Самостоятельная работа	3
7	Итоговый зачет		3

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение

3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Рабочая программа учебной дисциплины, дополнительная литература.

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Раздаточный материал для выполнения домашних заданий.

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Контроль успеваемости и качества усвоения учебного материала проводится путем разбора домашнего задания, самостоятельных работ (1 раз в месяц), и итоговой аттестации в форме зачета.Итоговая работа выполняется в письменном виде по заданиям, соответствующим проекту КИМ ЕГЭ текущего года. Каждая задача оценивается в 2-4 балла(возможно оценивание не на полный балл при верном ходе решения, но допущенных арифметических и других ошибках) Оценивание итоговой работы идет в соответствии со шкалой: 25-35 баллов – оценка «отлично», 15-24 балла – оценка «хорошо», 6-14 баллов – оценка «удовлетворительно», 0-5 баллов – оценка «не удовлетворительно»

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Пример заданий самостоятельной работы/домашней работы для текущего контроля усвоения материала:

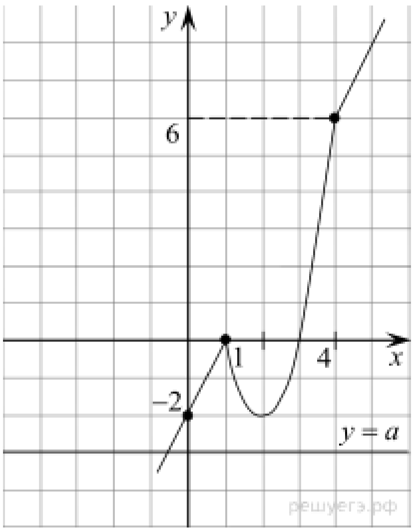
1. Решение задач на тему «Функции, их свойства, графики, формулы и тождества.»

1. Построить график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a.$$

Решение.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|.$



2. Решение задач на тему «Методы и приемы решения алгебраических уравнений.»

1. а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right].$

Решение.

а) Заметим, что уравнение определено при любом x. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2 + 5) = \log_2(8x^4 + 14) - \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(4x^4 + 7) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 9x^2+5=4x^4+7 \Leftrightarrow 4x^4-9x^2+2=0 \Leftrightarrow (4x^2-1)(x^2-2)=0.$

Значит, либо $4x^2-1=0$, откуда $x=\frac{1}{2}$ или $x=-\frac{1}{2}$, либо $x^2-2=0$, откуда $x=\sqrt{2}$ или $x=-\sqrt{2}.$

б) Поскольку $-\sqrt{2}<-1<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{8}{9}<\sqrt{2},$ отрезку $\left[-1;\frac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}.$

Ответ: а) $x=\pm\sqrt{2}, x=\pm\frac{1}{2};$ б) $\pm\frac{1}{2}.$

2. а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [−1; 2].

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0 \Leftrightarrow 7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-12\cdot 4^{x^2-3x+1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1}+5\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-12=0 \Leftrightarrow 7\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right)^2+5\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=1,\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=-\frac{12}{7}.\end{array}\right.$$

У второго уравнения решений нет.

Преобразуем первое уравнение: $x^2-3x+1=0$, откуда $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$

б) Оценим $\sqrt{5}$ целыми числами: $2<\sqrt{5}<3.$ Тогда

$$\frac{5}{2}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3 \text{ и } 0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2}.$$

Значит, отрезку $[-1;\,2]$ принадлежит только $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

Ответ: а) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};$ б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

3. а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2},\,6\pi\right].$

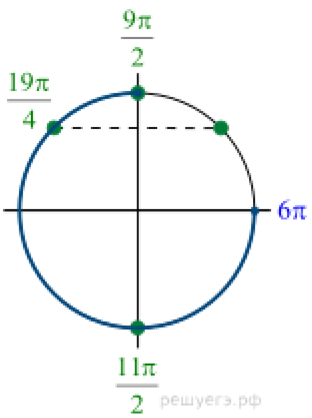
Решение.

а) В силу нечетности и периодичности синуса имеем:

$$-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos x.$$

Далее имеем:

$$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x=\cos x\Leftrightarrow\cos x(\sqrt{2}\cdot\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$



б) При помощи числовой прямой или тригонометрической окружности (см. рис.) для каждой из задающих решения серий отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[4,5\pi;\,6\pi]$.

Находим три решения: $\frac{9\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{19\pi}{4};\ 6\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{2}.$

Ответ:

а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$;

б) $\frac{9\pi}{2};\ \frac{19\pi}{4};\ \frac{11\pi}{2}.$

3. Решение задач на тему «Неравенства и производная»

1. Решите неравенство: $\frac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1} \le -0,2.$

Решение.

Пусть $y = \frac{1}{x-6}.$ Получим

$$\frac{2-y}{5y-1} \le -0,2 \Leftrightarrow \frac{1,8}{5y-1} \le 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x-6} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{x-11}{x-6} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 6, \\ x > 11. \end{array}\right.$$

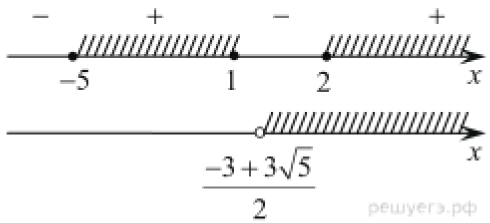
Ответ: $(-\infty;\ 6) \cup (11;\ +\infty).$

2. Решите неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right).$$

Решение.

Решим неравенство:



$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3(x^3+3x^2+1-10x), \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-9 \le x^3+3x^2+1-10x, \\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}, \\ x>\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}, \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2-13x+10 \ge 0, \\ x>\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+3x-10) \ge 0, \\ x>\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Ответ: $[2;+\infty)$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y=3x-\ln(x+3)^3$ на отрезке [−2,5; 0].

Решение.

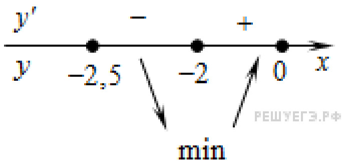
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x)=3-\frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3-\dfrac{3}{x+3}=0, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+3}=1, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=-2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

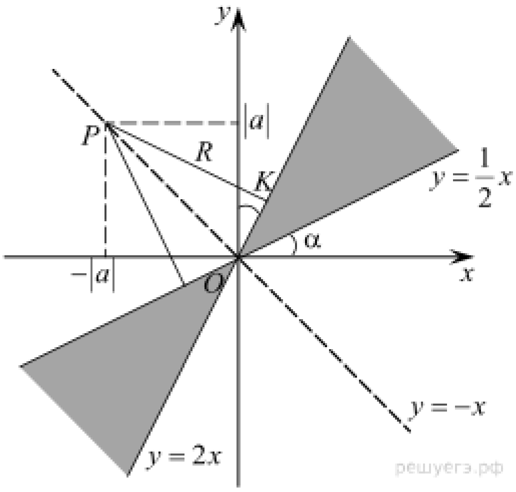
$$y(-2)=-2\cdot 3-\ln 1=-6.$$

Ответ: −6.

4. Решение задач на тему «Методы решения задач с параметром.»

1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система
$$\begin{cases}(y-2x)(2y-x)\le 0,\\ \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}}\end{cases}$$
имеет ровно два решения.

Решение.



Неравенство задает пару вертикальных углов на координатной плоскости *Oxy* (см. рисунок). Графиком уравнения является окружность радиуса $R=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}},$ центр которой — точка $P(-a;a)$— лежит на прямой $y=-x.$ Поскольку оба графика симметричны относительно прямой $y=-x,$система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние *PK* от центра окружности до прямой $y=2x$будет равняться радиусу $R=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}}$ данной окружности. Из треугольника *POK* находим: $PK=PO\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right),$где $\operatorname{tg}\alpha$— угловой коэффициент прямой $y=\dfrac{1}{2}x.$ Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2},$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},$$ откуда

$$PK=PO\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=|a|\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{3|a|}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно получаем: $\dfrac{3|a|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}},\ 3a=\pm(a+1),\ a=\dfrac{1}{2}$ или $a=-\dfrac{1}{4}.$

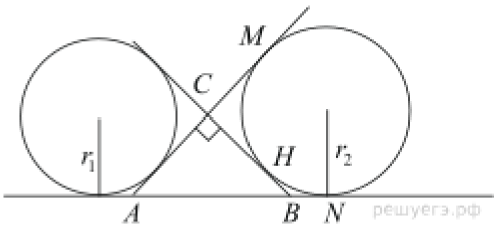
Ответ: $a=\dfrac{1}{2}$ или $a=-\dfrac{1}{4}.$

5. Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB.

б) Найдите площадь треугольника ACB.

Решение.



а) Введём обозначения, как показано на рисунке, пусть M, H, N — точки касания. Касательные, проведённые к окружности из одной точки равны: $AM = AN$, $CM = CH$, $HB = BN$. Поэтому:

$$P = AC + CH + HB + AB \; = \; AC + CM + BN + AB \; = \; AM + AN \; = 2AM,$$

откуда $p = AM$.

б) Для определения площади треугольника используем формулу, связывающую её с полупериметром, стороной и радиусом вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других сторон треугольника:

$$S = (p - AC) \cdot r_1 = (AM - AC) r_1 = CM r_1 = r_2 r_1 = 8.$$

Ответ: $S_{ACB} = 8.$

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

Преподаватели, имеющие высшее профессиональное образование в области математики, опыт преподавания математики школьникам, эксперты ЕГЭ (наличие сертификата).